Simulación en procesos de difusión

Raúl Ferreira

Universidad Complutense de Madrid

La matemática en el aula y en el mundo real

Curso de formación del profesorado en matemáticas.

Colegio de Doctores y Licenciados de Madrid

La ecuación del calor

- La ecuación del calor es un modelo matemático (quizás el más sencillo) que trata de describir la difusión de la temperatura en un cuerpo solido

La ecuación del calor

- La ecuación del calor es un modelo matemático (quizás el más sencillo) que trata de describir la difusión de la temperatura en un cuerpo solido
- Fue propuesta por Fourier en 1807 en su memoria “Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides”

La ecuación del calor

- La ecuación del calor es un modelo matemático (quizás el más sencillo) que trata de describir la difusión de la temperatura en un cuerpo solido
- Fue propuesta por Fourier en 1807 en su memoria “Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides”

- Tan controvertida fue esta teoría que la Academia de Ciencias no se decidió a publicarla hasta 1822.

Un problema de calor

- Consideremos una barra de metal de longitud uno ($0 \leq x \leq 1$) que después de un cierto tiempo t_0, hemos calentado a una temperatura $T(x, t_0)$.

Un problema de calor

- Consideremos una barra de metal de longitud uno ($0 \leq x \leq 1$) que después de un cierto tiempo t_0, hemos calentado a una temperatura $T(x, t_0)$.

- Supongamos que para todo tiempo posterior ($t > t_0$) mantenemos los extremos de la barra $x = 0$ y $x = 1$ a temperatura cero.

Un problema de calor

- Consideremos una barra de metal de longitud uno ($0 \leq x \leq 1$) que después de un cierto tiempo t_0, hemos calentado a una temperatura $T(x, t_0)$.

- Supongamos que para todo tiempo posterior ($t > t_0$) mantenemos los extremos de la barra $x = 0$ y $x = 1$ a temperatura cero.

- Dejamos que la temperatura evolucione libremente y estamos interesados en un modelo matemático que nos permita predecir la temperatura $T(x, t)$ en cualquier tiempo futuro ($t > 0$).

Un problema de calor

- Consideremos una barra de metal de longitud uno ($0 \leq x \leq 1$) que después de un cierto tiempo t_0, hemos calentado a una temperatura $T(x, t_0)$.

- Supongamos que para todo tiempo posterior ($t > t_0$) mantenemos los extremos de la barra $x = 0$ y $x = 1$ a temperatura cero.

- Dejamos que la temperatura evolucione libremente y estamos interesados en un modelo matemático que nos permita predecir la temperatura $T(x, t)$ en cualquier tiempo futuro ($t > 0$).

- Evidentemente no hay un "único modelo". Depende de la precisión y el rango de valores en que pretendemos que sea valido.

El Modelo de Fourier

- La densidad de energía necesaria para llevar un trozo de longitud Δx de temperatura cero a temperatura T es proporcional a T.

El Modelo de Fourier

- La densidad de energía necesaria para llevar un trozo de longitud Δx de temperatura cero a temperatura T es proporcional a T.

- La energía fluye de las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura.

El Modelo de Fourier

- La densidad de energía necesaria para llevar un trozo de longitud Δx de temperatura cero a temperatura T es proporcional a T.

- La energía fluye de las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura.

- La energía se conserva.

El Modelo de Fourier

- La densidad de energía necesaria para llevar un trozo de longitud Δx de temperatura cero a temperatura T es proporcional a T.

- La energía fluye de las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura.

- La energía se conserva.

$$\begin{cases} u_t = \frac{\theta}{k} u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Existencia

- Separación de variables

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Existencia

- Separación de variables

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

- Si $u_0(x) = \sin(n\pi x)$ podemos construir una solución explícita

$$u(x,t) = \sin(n\pi x)\, e^{(n\pi)^2\, t}$$

Existencia

- Separación de variables

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

- Si $u_0(x) = \sin(n\pi x)$ podemos construir una solución explícita

$$u(x,t) = \sin(n\pi x)\, e^{(n\pi)^2\, t}$$

- Por linealidad,

$$u(x,t) = \sum c_n\, \sin(n\pi x)\, e^{(n\pi)^2\, t}$$

es una solución con dato inicial

$$u_0(x) = \sum c_n\, \sin(n\pi x)$$

Unicidad

- Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones con el mismo dato inicial,

$$u_1(x,0) = u_2(x,0)$$

Unicidad

- Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones con el mismo dato inicial,

$$u_1(x,0) = u_2(x,0)$$

- Por linealidad, la función $v = u_1 - u_2$ también es solución de la ecuación del calor. Además,

$$v(x,0) = 0\,.$$

Unicidad

- Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones con el mismo dato inicial,
$$u_1(x,0) = u_2(x,0)$$
- Por linealidad, la función $v = u_1 - u_2$ también es solución de la ecuación del calor. Además,
$$v(x,0) = 0\,.$$
- Pero si a una barra ni la caliento ni la enfrio, mantiene siempre la misma temperatura, por tanto
$$v(x,t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u_1(x,t) = u_2(x,t)\,.$$

El Modelo de Fourier

$$\begin{cases} u_t = \frac{\theta}{k} u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$
\boxed{\begin{cases} u_t = \frac{\theta}{k} u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}}
$$

- Como mucho existe una solución.

El Modelo de Fourier

$$\begin{cases} u_t = \frac{\theta}{k} u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

- Como mucho existe una solución.

- Sabemos construirla en el caso en que

$$u_0(x) = \sum c_n \sin(n\pi x)$$

- Fourier demuestra que toda función “buena”que se anule en los extremos del intervalo puede expresarse mediante una serie de senos,

- Fourier demuestra que toda función “buena”que se anule en los extremos del intervalo puede expresarse mediante una serie de senos,

$$u_0 \in C_0^1(0,1) \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = \sum c_n \sin(n\pi x)$$

- Fourier demuestra que toda función “buena”que se anule en los extremos del intervalo puede expresarse mediante una serie de senos,

$$u_0 \in C_0^1(0,1) \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = \sum c_n \, \sin(n\pi x)$$

- Además viendo las integrales como áreas bajo curvas deduce que

$$c_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \, \sin(n\pi x) \, dx$$

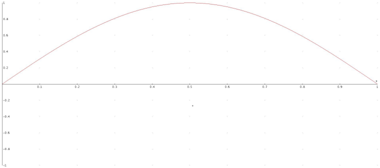
- Fourier demuestra que toda función “buena”que se anule en los extremos del intervalo puede expresarse mediante una serie de senos,

$$u_0 \in C_0^1(0,1) \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = \sum c_n \, \sin(n\pi x)$$

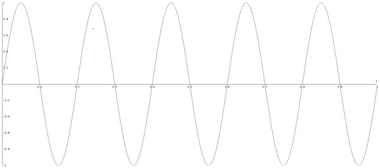
- Además viendo las integrales como áreas bajo curvas deduce que

$$c_n = 2\int_0^1 u_0(x)\, \sin(n\pi x)\, dx$$

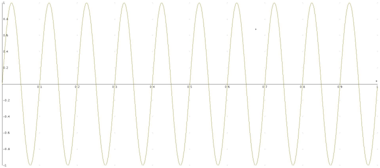
- Nace así el Análisis de Fourier, tan revolucionario que costo 15 años que los matemáticos de la época aceptaran que una función (por ejemplo una poligonal) se pudiera escribir como una serie de funciones altamente oscilatorias.



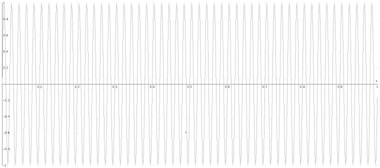
$\sin(\pi x)$



$\sin(10\pi x)$



$\sin(20\pi x)$

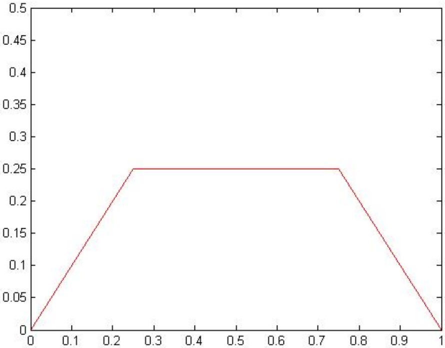


$\sin(100\pi x)$

Series de Fourier

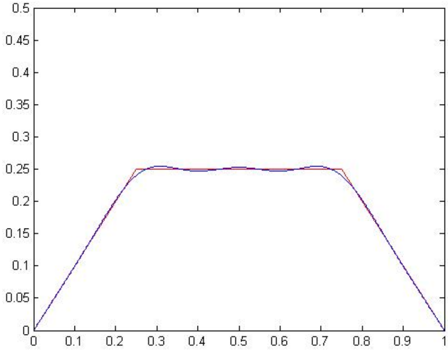
- Riemann escribió que “esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”

- Riemann escribió que “esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”



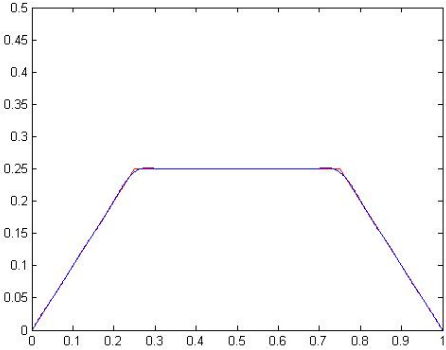
Series de Fourier

- Riemann escribió que “esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”



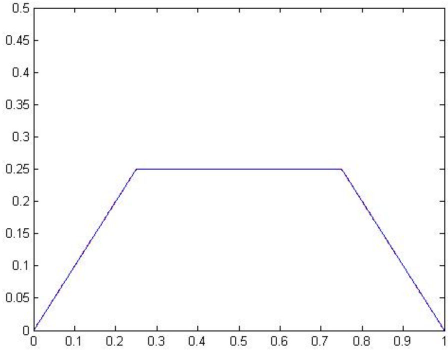
$$N = 10$$

- Riemann escribió que “esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”



$$N = 20$$

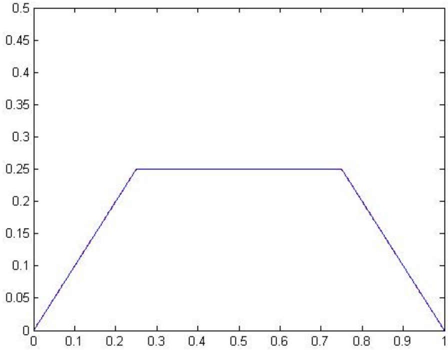
- Riemann escribió que “esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”



$$N = 100$$

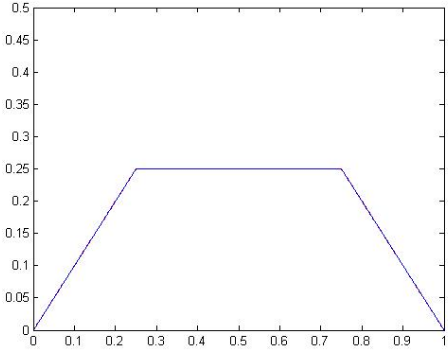
Series de Fourier

- Riemann escribió que "esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida"



$$N = 1000$$

- Riemann escribió que “esta afirmación resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”



$$N = 1000000$$

Análisis armónico

- Se puede obtener mucha información de una función conociendo la influencia que cada frecuencia ($\sin \lambda x$ ó $\cos \lambda x$) tiene en su composición.

- Se puede obtener mucha información de una función conociendo la influencia que cada frecuencia ($\sin \lambda x$ ó $\cos \lambda x$) tiene en su composición.
  Por ejemplo, a partir del decaimiento de los coeficientes de la serie de Fourier se puede obtener información sobre la regularidad de la función.

Análisis armónico

- Se puede obtener mucha información de una función conociendo la influencia que cada frecuencia ($\sin \lambda x$ ó $\cos \lambda x$) tiene en su composición.
  Por ejemplo, a partir del decaimiento de los coeficientes de la serie de Fourier se puede obtener información sobre la regularidad de la función.

- Como tal, ocupa un lugar fundamental en todo estudio que se relacione con teoría de ondas, transmisión de señales, reconstrucción de imágenes, ...

Análisis armónico

- Se puede obtener mucha información de una función conociendo la influencia que cada frecuencia ($\sin \lambda x$ ó $\cos \lambda x$) tiene en su composición.
  Por ejemplo, a partir del decaimiento de los coeficientes de la serie de Fourier se puede obtener información sobre la regularidad de la función.

- Como tal, ocupa un lugar fundamental en todo estudio que se relacione con teoría de ondas, transmisión de señales, reconstrucción de imágenes, ...

- Últimamente ha tomado gran importancia una forma de descomponer funciones en “trozos elementales”(wavelets) que describen las propiedades oscilatorias de la función simultáneamente en el espacio físico (variable x) y el espacio de las frecuencias (variable λ).

SIMULACIÓN NUMÉRICA

Diferencias finitas

- Usando los desarrollos de Taylor de la función u en la variable espacial,

- Usando los desarrollos de Taylor de la función u en la variable espacial,

$$u(x+h,t) = u(x,t) + hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x,t) + \frac{1}{6}h^3u_{xxx} + o(h^4)$$

- Usando los desarrollos de Taylor de la función u en la variable espacial,

$$u(x+h,t) = u(x,t) + hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x,t) + \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} + o(h^4)$$
$$u(x-h,t) = u(x,t) - hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x,t) - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} + o(h^4)$$

- Usando los desarrollos de Taylor de la función u en la variable espacial,

$$u(x+h,t) = u(x,t) + hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x,t) + \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} + o(h^4)$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2 u_{xx}(x,t) - \frac{1}{6}h^3 u_{xxx} + o(h^4)$$

$$u(x+h,t) + u(x-h,t) = 2u(x,t) + h^2 u_{xx}(x,t) + o(h^4)$$

- Usando los desarrollos de Taylor de la función u en la variable espacial,

$$u(x+h,t) = u(x,t) + hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x,t) + \frac{1}{6}h^3u_{xxx} + o(h^4)$$
$$u(x-h,t) = u(x,t) - hu_x(x,t) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x,t) - \frac{1}{6}h^3u_{xxx} + o(h^4)$$

$$u(x+h,t) + u(x-h,t) = 2u(x,t) + h^2u_{xx}(x,t) + o(h^4)$$

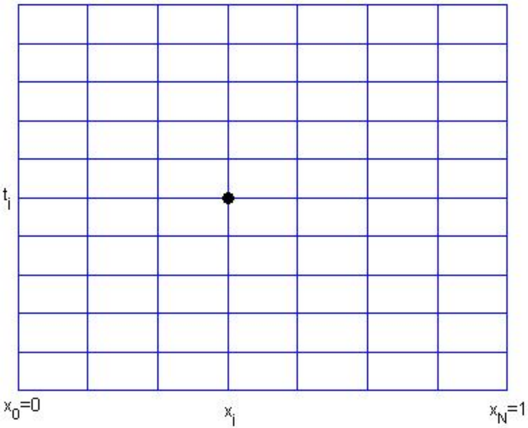
$$\boxed{u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + o(h^2)}$$

- Usando los desarrollos de Taylor de la función u en la variable t,

$$u(x, t+\tau) = u(x,t) + \tau u_t(x,t) + o(\tau^2)$$

$$\boxed{u_t(x,t) = \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} + o(\tau)}$$

Diferencias finitas



$$h = \frac{1}{N} \qquad \tau = \frac{\text{tiempo final}}{M}$$

- $$\begin{cases} u(x_0,t_j)=0 \\ \frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{\tau} = \frac{u(x_i+h,t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_i-h,t_j)}{h^2} + o(h^2) + o(\tau) \\ u(x_N,t_j)=0 \\ u(x_i,0)=u_0(x_i) \end{cases}$$

Diferencias finitas

- $$\begin{cases} u(x_0, t_j) = 0 \\ \frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{\tau} = \frac{u(x_i+h,t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_i-h,t_j)}{h^2} + o(h^2) + o(\tau) \\ u(x_N, t_j) = 0 \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i) \end{cases}$$
- Si definimos $u_i^j \sim u(x_i, t_j)$

Diferencias finitas

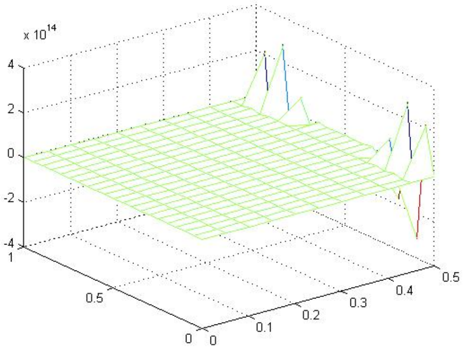
- $$\begin{cases} u(x_0, t_j) = 0 \\ \frac{u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)}{\tau} = \frac{u(x_i+h,t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_i-h,t_j)}{h^2} + o(h^2) + o(\tau) \\ u(x_N, t_j) = 0 \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i) \end{cases}$$
- Si definimos $u_i^j \sim u(x_i, t_j)$

$$\begin{cases} u_0^j = 0 & j > 0 \\ \frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2} & i = 1, \cdots, N-1 \quad j > 0 \\ u_N^j = 0 & j > 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) & i = 0, \cdots, N \end{cases}$$

Una simulación

$$u_0(x) = x(1-x) \qquad \tau = h = \frac{1}{20}$$

Una simulación



$$u_0(x) = x(1-x) \qquad \tau = h = \frac{1}{20}$$

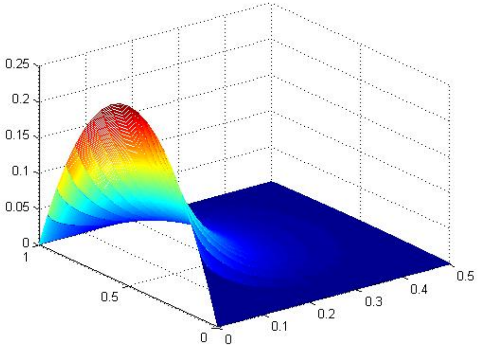
Una simulación bien hecha

- Para garantizar la convergencia $\dfrac{\tau}{h^2} < \dfrac{1}{2}$.

$$u_0(x) = x(1-x) \qquad h = \frac{1}{20} \qquad \tau = \frac{1}{4}\,h^2$$

Una simulación bien hecha

- Para garantizar la convergencia $\dfrac{\tau}{h^2} < \dfrac{1}{2}$.



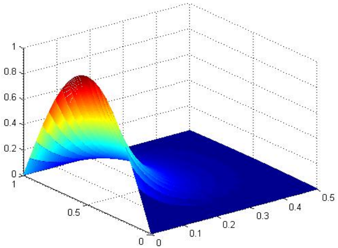
$$u_0(x) = x(1-x) \qquad h = \frac{1}{20} \qquad \tau = \frac{1}{4}\,h^2$$

¿Nos acercamos correctamente?

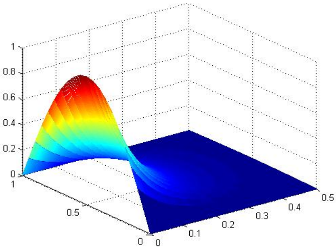
$$u_0(x) = \sin(\pi x) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,t) = e^{-2\pi\, t}\, \sin(\pi x)$$

¿Nos acercamos correctamente?

$$u_0(x) = \sin(\pi x) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,t) = e^{-2\pi t} \sin(\pi x)$$



solución aproximada

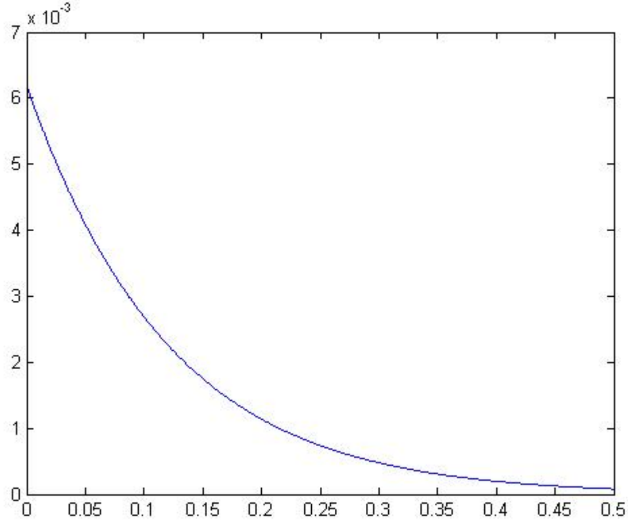


solución exacta

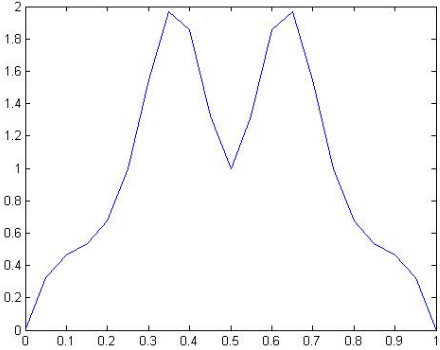
$$h = \frac{1}{20} \qquad \tau = \frac{1}{4} h^2$$

¿Nos acercamos correctamente?

$$u_0(x) = \sin(\pi x) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,t) = e^{-2\pi\, t}\,\sin(\pi x)$$

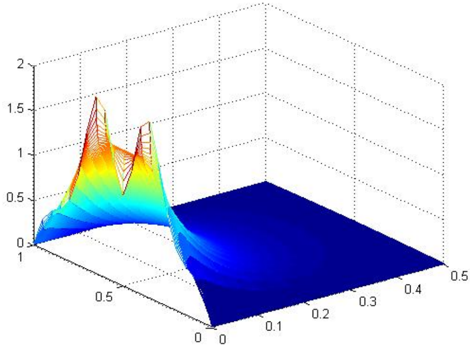


Otra simulación



Otra simulación

Otra simulación



El problema de Cauchy

Invariancias

- Traslaciones: $\hat{u}(x,t) = u(x-a, t-b)$ es solución de la ecuación del calor;

Invariancias

- Traslaciones: $\hat{u}(x,t) = u(x-a, t-b)$ es solución de la ecuación del calor;

- Simetrías en espacio $\hat{u}(x,t) = u(-x,t)$ es solución de la ecuación del calor;

Invariancias

- Traslaciones: $\hat{u}(x,t) = u(x-a, t-b)$ es solución de la ecuación del calor;

- Simetrías en espacio $\hat{u}(x,t) = u(-x,t)$ es solución de la ecuación del calor;

- Cambio de escala; $\hat{u}(x,t) = au(\sqrt{b}\,x, b\,t)$ es solución de la ecuación del calor.

Invariancias

- Traslaciones: $\hat{u}(x,t) = u(x-a, t-b)$ es solución de la ecuación del calor;

- Simetrías en espacio $\hat{u}(x,t) = u(-x,t)$ es solución de la ecuación del calor;

- Cambio de escala; $\hat{u}(x,t) = au(\sqrt{b}\,x, b\,t)$ es solución de la ecuación del calor.
  Si además queremos que la masa se conserve, esto es,

$$\int \hat{u}(x,t)\,dx = \int u(x,t)\,dx$$

  tenemos que $a = \sqrt{b}$

Autosemejanza

- $G(x,t) = \sqrt{b}u(\sqrt{b}\,x, b\,t)$ es una solución con la misma masa que u.

Autosemejanza

- $G(x,t) = \sqrt{b}u(\sqrt{b}\,x, b\,t)$ es una solución con la misma masa que u.
- Un poco de análisis dimensional;

Autosemejanza

- $G(x,t) = \sqrt{b}u(\sqrt{b}\,x, b\,t)$ es una solución con la misma masa que u.

- Un poco de análisis dimensional; la cantidad $\frac{[x]^2}{[t]}$ permanece invariante

- $G(x,t) = \sqrt{b}u(\sqrt{b}\,x, b\,t)$ es una solución con la misma masa que u.

- Un poco de análisis dimensional; la cantidad $\dfrac{[x]^2}{[t]}$ permanece invariante

- Tomando $b = \dfrac{1}{t}$ la función u la veo siempre en el instante uno. Por tanto, la solución $G(x,t)$ tiene la forma

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,F(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

El núcleo de Gauss

- El perfil F viene dado por $F(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4}}$

El núcleo de Gauss

- El perfil F viene dado por $F(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4}}$

- Por tanto la función G viene dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

El núcleo de Gauss

- El perfil F viene dado por $F(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4}}$

- Por tanto la función G viene dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

- Si además queremos que tenga masa uno

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

El núcleo de Gauss

- El perfil F viene dado por $F(\xi) = e^{\frac{-\xi^2}{4}}$

- Por tanto la función G viene dada por

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

- Si además queremos que tenga masa uno

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

Su dato inicial esta concentrado en el origen. Es decir, es una "masa puntual"de una unidad de calor puesta en el origen.

Formula de representación

- si queremos colocar la “masa puntual” en el punto y,

$$u(x,t) = G(x-y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} .$$

Formula de representación

- si queremos colocar la “masa puntual” en el punto y,

$$u(x,t) = G(x-y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\,.$$

- Por linearidad, podemos superponer “masas puntuales”de intensidades c_i en los puntos y_i,

$$u(x,t) = \sum c_i G(x-y_i,t)\,.$$

Formula de representación

- si queremos colocar la “masa puntual” en el punto y,

$$u(x,t) = G(x-y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} .$$

- Por linearidad, podemos superponer “masas puntuales”de intensidades c_i en los puntos y_i,

$$u(x,t) = \sum c_i G(x-y_i,t) .$$

- Si la temperatura inicial viene dada por una función u_0,

$$G(x-y,t)u_0(y) .$$

Formula de representación

- si queremos colocar la “masa puntual” en el punto y,

$$u(x,t) = G(x-y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\ .$$

- Por linearidad, podemos superponer “masas puntuales”de intensidades c_i en los puntos y_i,

$$u(x,t) = \sum c_i G(x-y_i,t)\, .$$

- Si la temperatura inicial viene dada por una función u_0,

$$u(x,t) = \int G(x-y,t) u_0(y)\, dy\, .$$

Formula de representación

$$u(x,t) = \int G(x-y,t)u_0(y)\,dy\,.$$

Esta formula de representación nos dice (entre otras cosas) que:

Formula de representación

$$u(x,t) = \int G(x-y,t)u_0(y)\,dy\,.$$

Esta formula de representación nos dice (entre otras cosas) que:

- si la temperatura inicial es positiva, permanece positiva;

Formula de representación

$$u(x,t) = \int G(x-y,t)u_0(y)\,dy\,.$$

Esta formula de representación nos dice (entre otras cosas) que:

- si la temperatura inicial es positiva, permanece positiva;
- velocidad infinita de propagación;

Formula de representación

$$u(x,t) = \int G(x-y,t)u_0(y)\,dy\,.$$

Esta formula de representación nos dice (entre otras cosas) que:

- si la temperatura inicial es positiva, permanece positiva;
- velocidad infinita de propagación;
- Que el efecto de cualquier cambio de temperatura se hace sentir instantáneamente en toda la barra;

Formula de representación

$$u(x,t) = \int G(x-y,t)u_0(y)\,dy\,.$$

Esta formula de representación nos dice (entre otras cosas) que:

- si la temperatura inicial es positiva, permanece positiva;
- velocidad infinita de propagación;
- Que el efecto de cualquier cambio de temperatura se hace sentir instantáneamente en toda la barra;
- Efecto regularizante.

CAMINOS ALEATORIOS

Un experimento aleatorio

- Supongamos que el instante inicial estamos parados en el origen

Un experimento aleatorio

- Supongamos que el instante inicial estamos parados en el origen

- Lanzamos una moneda y si sale cara me muevo a la derecha un distancia h y si sale cruz me muevo a la izquierda

Un experimento aleatorio

- Supongamos que el instante inicial estamos parados en el origen
- Lanzamos una moneda y si sale cara me muevo a la derecha un distancia h y si sale cruz me muevo a la izquierda
- Cada τ unidades de tiempo, repito el experimento.

Un experimento aleatorio

- Supongamos que el instante inicial estamos parados en el origen

- Lanzamos una moneda y si sale cara me muevo a la derecha un distancia h y si sale cruz me muevo a la izquierda

- Cada τ unidades de tiempo, repito el experimento.

- Pregunta:

  ¿Cual es la probabilidad $u(x,t)$ de que en tiempo t nos encontremos en la posición x?

Un experimento aleatorio

- Por la ley de la probabilidad total

$$u(x,t) = \frac{1}{2}u(x+h, t-\tau) + \frac{1}{2}u(x-h, t-\tau)$$

Un experimento aleatorio

- Por la ley de la probabilidad total

$$u(x,t) = \frac{1}{2}u(x+h,t-\tau) + \frac{1}{2}u(x-h,t-\tau)$$

- Restando $u(x,t-\tau)$ en ambos lados,

$$u(x,t) - u(x,t-\tau) = \frac{1}{2}\Big(u(x+h,t-\tau) + u(x-h,t-\tau) - 2u(x,t-\tau)\Big)$$

Un experimento aleatorio

- Por la ley de la probabilidad total

$$u(x,t) = \frac{1}{2}u(x+h, t-\tau) + \frac{1}{2}u(x-h, t-\tau)$$

- Restando $u(x, t-\tau)$ en ambos lados,

$$u(x,t) - u(x,t-\tau) = \frac{1}{2}\Big(u(x+h,t-\tau) + u(x-h,t-\tau) - 2u(x,t-\tau)\Big)$$

- Tomando $\tau = h^2$

$$\frac{u(x,t) - u(x,t-\tau)}{\tau} = \frac{u(x+h,t-\tau) + u(x-h,t-\tau) - 2u(x,t-\tau)}{2h^2}$$

Un experimento aleatorio

- Si $h \to 0$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\, u_{xx}(x,t)$$

Un experimento aleatorio

- Si $h \to 0$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\, u_{xx}(x,t)$$

- Pero, en el instante inicial estábamos en el origen. Con lo cual, tenemos un dato inicial que es una “masa puntual”

Un experimento aleatorio

- Si $h \to 0$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\, u_{xx}(x,t)$$

- Pero, en el instante inicial estábamos en el origen. Con lo cual, tenemos un dato inicial que es una “masa puntual”

$$u(x,t) = G(x, \frac{t}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Un punto de vista probabilístico

- Sea $X_N(t)$ la posición en la que estoy después de repetir el experimento N veces.

Un punto de vista probabilístico

- Sea $X_N(t)$ la posición en la que estoy después de repetir el experimento N veces.
- Sea α_i la variable aleatoria de tirar una moneda,

$$P(\alpha_i = 1) = \frac{1}{2} \qquad P(\alpha_i = -1) = \frac{1}{2}$$

Un punto de vista probabilístico

- Sea $X_N(t)$ la posición en la que estoy después de repetir el experimento N veces.
- Sea α_i la variable aleatoria de tirar una moneda,

$$P(\alpha_i = 1) = \frac{1}{2} \qquad P(\alpha_i = -1) = \frac{1}{2}$$

- Entonces,

$$X_N(t) = X_{N-1}(t) + \alpha_N h$$

Un punto de vista probabilístico

- Sea $X_N(t)$ la posición en la que estoy después de repetir el experimento N veces.
- Sea α_i la variable aleatoria de tirar una moneda,

$$P(\alpha_i = 1) = \frac{1}{2} \qquad P(\alpha_i = -1) = \frac{1}{2}$$

- Entonces,

$$X_N(t) = X_{N-1}(t) + \alpha_N h \qquad \Rightarrow \qquad X_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i h$$

Un punto de vista probabilístico

- Sea $X_N(t)$ la posición en la que estoy después de repetir el experimento N veces.
- Sea α_i la variable aleatoria de tirar una moneda,

$$P(\alpha_i = 1) = \frac{1}{2} \qquad P(\alpha_i = -1) = \frac{1}{2}$$

- Entonces,

$$X_N(t) = X_{N-1}(t) + \alpha_N h \qquad \Rightarrow \qquad X_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i h$$

- Como α_i son variables aleatorias independientes

$$E(X_N(t)) = \sum_{i=1}^{N} E(\alpha_i) h = 0 \qquad V(X_N(t)) = \sum_{i=1}^{N} V(\alpha_i) h^2 = N\, h^2$$

Un punto de vista probabilístico

- Como $t = N\tau$

$$V(X_N(t)) = \sum_{i=1}^{N} V(\alpha_i)h^2 = N\,h^2 = t\frac{h^2}{\tau}$$

Un punto de vista probabilístico

- Como $t = N\tau$

$$V(X_N(t)) = \sum_{i=1}^{N} V(\alpha_i)h^2 = N\,h^2 = t\frac{h^2}{\tau}$$

- Cuando $N \to \infty$, la dispersión se mantiene acotada y no nula sólo si

$$h^2 = \tau$$

Un punto de vista probabilístico

- Como $t = N\tau$

$$V(X_N(t)) = \sum_{i=1}^{N} V(\alpha_i)h^2 = N\,h^2 = t\frac{h^2}{\tau}$$

- Cuando $N \to \infty$, la dispersión se mantiene acotada y no nula sólo si

$$h^2 = \tau$$

- Entonces nuestra variable aleatoria en tiempo $t = 1$ viene dada por

$$X_N(1) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\sqrt{\tau} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N}{\sqrt{N}}$$

El teorema central del límite

- Como la probabilidad de estar en tiempo $t = 1$ en un punto x convergía al núcleo de Gauss, tenemos que

$$X_N(1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N}{\sqrt{N}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

El teorema central del límite

- Como la probabilidad de estar en tiempo $t = 1$ en un punto x convergía al núcleo de Gauss, tenemos que

$$X_N(1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N}{\sqrt{N}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

- Es decir en el límite $X_N(1)$ sigue una distribución $N(0, 1)$

El teorema central del límite

- Como la probabilidad de estar en tiempo $t = 1$ en un punto x convergía al núcleo de Gauss, tenemos que

$$X_N(1) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N}{\sqrt{N}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

- Es decir en el límite $X_N(1)$ sigue una distribución $N(0, 1)$

- Si $t \neq 1$

$$X_N(t) \to N(0, \sqrt{t}).$$