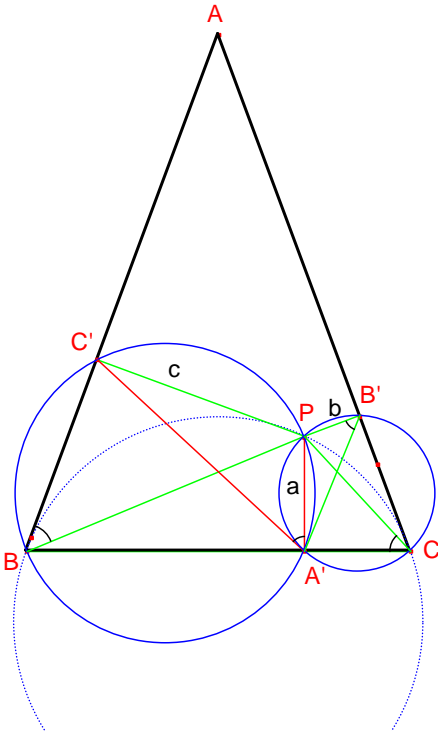


## OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

El triángulo  $ABC$  es isósceles, con  $AB = AC$ . Sea  $P$  un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados  $AB$  y  $AC$  en los vértices  $B$  y  $C$  respectivamente, y sean  $a, b$  y  $c$  las distancias desde  $P$  a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  respectivamente. Probar que  $a^2 = b \cdot c$ . (OME 2006, problema 3)



y abarcan la misma cuerda.

Mirando la circunferencia del enunciado, tangente a los lados  $AB$  y  $AC$  del triángulo, también resulta  $\widehat{PBC} = \widehat{PCB'}$ . Pero entonces  $\alpha = \beta$ , ya que los ángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{ACB}$  del triángulo isósceles  $ABC$  son iguales.

De manera análoga se prueba la igualdad de los ángulos  $\widehat{PC'A'}$  y  $\widehat{PA'B'}$ .

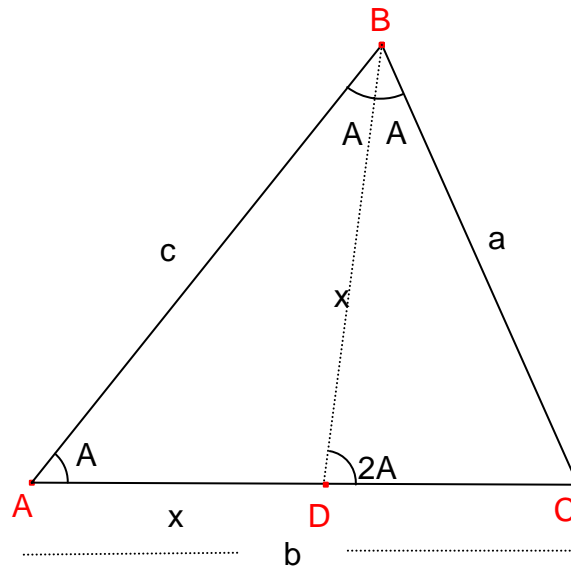
Llamemos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  a los pies de las perpendiculares desde  $P$  a cada uno de los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ .

La igualdad que debemos probar equivale a  $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ , que sugiere pensar en semejanza de triángulos.

Si probamos que los triángulos  $PA'B'$  y  $PC'A'$  son semejantes habremos resuelto el problema. Intentamos pues probar que  $\widehat{C'A'P} = \widehat{PB'A'}$  y que  $\widehat{PC'A'} = \widehat{PA'B'}$ .

Los cuadriláteros  $PA'CB'$  y  $PA'BC'$  son ambos cíclicos, ya que en cada uno de ellos un par de ángulos opuestos son rectos. Así pues,  $\widehat{PB'A'} = \widehat{PCA'} = \beta$  y  $\widehat{C'A'P} = \widehat{C'BP} = \alpha$ , ya que en cada caso están inscritos en una misma circunferencia

Probar que existe un único triángulo cuyos lados son números enteros consecutivos, y en el que un ángulo es doble de otro. (IMO 1968, problema 1)



Llamemos  $A, B$  y  $C$  a los vértices del triángulo, y  $a, b$  y  $c$  a la medida de sus lados. Observamos que:

- El triángulo  $ADX$  es isósceles, con  $AD = BD = x$
- Además, el segmento  $BD$  es bisectriz interior del triángulo, y por lo tanto (teorema de la bisectriz):  $\frac{c}{a} = \frac{AD}{DC} = \frac{x}{b-x}$ , de donde  $bc - cx = ax$ , es decir

$$bc = (a+c)x, \text{ lo que permite concluir que } x = \frac{bc}{a+c} \text{ y } b-x = \frac{ba}{a+c}$$

- Otro hecho importante deducido directamente de las hipótesis es que los triángulos  $ABC$  y  $BDC$ , con dos ángulos iguales, son semejantes, y  $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ .

Sustituyendo obtenemos:  $\frac{a}{ba} = \frac{b}{a}$ , de donde  $a^2 = \frac{b^2 a}{a+c}$  y  $a(a+c) = b^2$  (\*).

$$\frac{a}{a+c}$$

Analizamos ahora las posibilidades, teniendo presente que  $A < B = 2A$ . Pueden darse tres casos:

- a)  $A < B < C$ . Las medidas de los lados, enteros consecutivos, serían entonces  $a, b = a+1, c = a+2$ . Imponiendo la condición (\*) tenemos:

$$(a+1)^2 = a(a+a+2) = 2a^2 + 2a$$

que nos da como medidas de los lados los valores 1, 2 y 3. Pero estos no forman triángulo, ya que no se cumple la desigualdad triangular ( $3 = 1 + 2$ )

b)  $A < C < B$ . Los lados serían ahora  $a, c = a + 1, b = a + 2$ .

Aplicando de nuevo la condición (\*) tenemos:  $(a + 2)^2 = 2a^2 + a$ , ecuación de segundo grado en  $a$  con una solución entera,  $a = 4$ . Tendríamos entonces el triángulo de lados 4, 5 y 6.

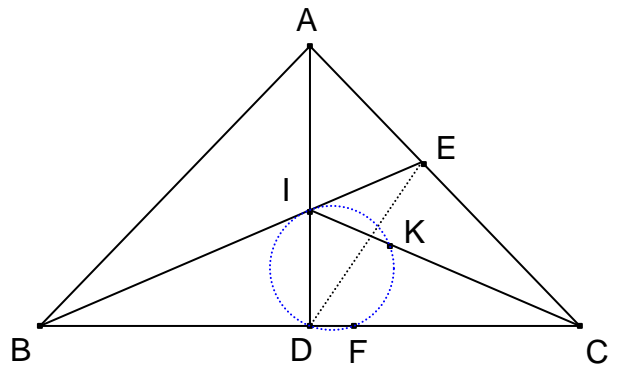
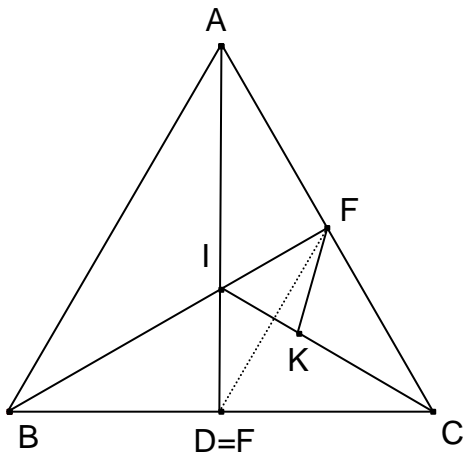
a)  $C < A < B$ ; lados  $a, c = a - 1, b = a + 1$ . El desarrollo de la condición anterior nos da en este caso la ecuación:  $(a + 1)^2 = a(2a - 1)$ , o sea  $a^2 - 3a - 1 = 0$ , que no tiene soluciones enteras.

Queda por lo tanto probado que hay un único triángulo en que las medidas de los lados sean enteros consecutivos, 4, 5 y 6, y uno de los ángulos sea el doble de otro.

Sea  $ABC$  un triángulo con  $AB = AC$ . Las bisectrices de los ángulos  $\hat{C}AB$  y  $\hat{A}BC$  cortan a los lados  $BC$  y  $CA$  en los puntos  $D$  y  $E$ , respectivamente. Sea  $K$  el incentro del triángulo  $ADC$ . Supongamos que el ángulo  $\hat{B}EK = 45^\circ$ . Determinar todos los valores posibles del ángulo  $\hat{C}AB$ . (IMO 2009, problema 4)

Sea  $F$  el punto simétrico de  $E$  respecto de  $IC$ . Será evidentemente un punto de  $DC$ . Puede ocurrir:

a)  $F = D$ . Entonces,  $\hat{I}EC = \hat{I}DC = 90^\circ$ , es decir,  $BE$  es perpendicular a  $AC$ . Resulta entonces  $BC = BA$ , el triángulo  $ABC$  es equilátero, y  $\hat{C}AB = 60^\circ$ .



b)  $F \neq D$ . Entonces el cuadrilátero  $IKDF$  es cíclico, ya que  $\hat{I}FK = \hat{I}EK = 45 = \hat{I}DK$ . Entonces  $\hat{E}IK = \hat{F}IK = \hat{F}DK = 45^\circ$ , y también  $\hat{B}IC = 180 - \hat{E}IK = 135^\circ$ ,  $\hat{B}CI = \hat{C}BI = \frac{180 - 135}{2} = \frac{45}{2}$ , es decir, los ángulos iguales de  $ABC$  miden ambos  $45^\circ$ , y  $\hat{C}AB = 90^\circ$ .



La potencia de  $B$  respecto de ambas circunferencias (la inicial y la definida por el cuadrilátero cíclico) es la misma, ya que  $CN$  es el **eje radical** de ambas, y tenemos:

$$BM \cdot BP = BN \cdot BC = BO^2 - r^2 \quad (2)$$

Restando ahora (2) y (1):

$$PO^2 - BO^2 = BP \cdot (PM - BM) = (PM + BM)(PM - BM) = PM^2 - BM^2$$

lo que permite asegurar que  $OM$  es perpendicular a  $BM$ .

*Demostrar que para todo entero positivo  $n$  la fracción  $\frac{21n+4}{14n+3}$  es irreducible.*

(1ª IMO 1959, problema 1)

Se trata de ver que cualquiera que sea  $n$ , los números  $A = 21n + 4$  y  $B = 14n + 3$  son primos entre sí, es decir, tienen 1 como máximo común divisor.

Basta entonces ver cuando podemos expresar 1 como combinación lineal de  $A$  y de  $B$  con coeficientes enteros. Observemos que

$$2A - 3B = -1 \text{ y } 3B - 2A = 1.$$

Así, cualquier divisor común de  $A$  y de  $B$  lo será también de 1; por tanto,

$$\text{mcd}(21n + 4, 14n + 3) = 1, \text{ y la fracción es irreducible para cualquier valor de } n.$$

*Decimos que un número primo es “raro” si*

- *Tiene una sola cifra, o*
- *Al suprimir su primera cifra se obtiene un número raro, y al suprimir su última cifra se obtiene un número raro.*

*Determina todos los números raros.* (Olimpiada de mayo, primer nivel)

Los números raros de una cifra son 2, 3, 5 y 7.

Los números raros de dos cifras son del tipo  $ab$ , con  $a$  y  $b$  elegidos en el conjunto  $\{2,3,5,7\}$ . Puesto que deben ser primos,  $b$  no puede ser 2 ni 5, pues en ese caso el número sería múltiplo de 2 o de 5. Además  $a \neq b$  para que el número no sea múltiplo de 11. Haciendo una lista de las posibilidades restantes, obtenemos 23, 27, 37, 53, 57 y 73. Entre estos, descartamos 27 y 57, que son múltiplos de 3. Así los números raros de dos cifras son 23, 37, 53 y 73.

Los números raros de tres cifras serán del tipo  $abc$ , siendo tanto  $ab$  como  $bc$  números del conjunto  $\{23, 37, 53, 73\}$ . Los únicos candidatos son 237, 537, 737 y 373. Los dos primeros son múltiplos de 3 y el tercero lo es de 11, mientras que 373 resulta ser primo, y será el único número raro de tres cifras.

Esto significa que no puede haber números raros de cuatro cifras, y por lo tanto, tampoco existirá ningún número raro de más de cuatro cifras.

¿Existe alguna potencia de 2 que escrita en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justifica la respuesta. (OME 2004, problema 4)

Supongamos que existen dos potencias de 2,  $A = 2^n$  y  $B = 2^m$  que tengan los mismos dígitos en diferente orden. Si  $n < m$ , obtendremos  $B$  a partir de  $A$  multiplicando por una potencia de 2, que podrá ser 2, 4 u 8, ya que al multiplicar por 16 aumenta el número de cifras. Por otra parte,  $A$  y  $B$ , que tienen los mismos dígitos, dan el mismo resto en la división entre 9.

Estudiando el comportamiento de las potencias de 2 módulo 9, observamos que son congruentes con 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1,....., es decir que para que dos potencias de 2 den el mismo resto en la división entre 9, los exponentes deben diferenciarse en un múltiplo de 6. Por lo tanto, no existe ninguna potencia de 2 en las condiciones del enunciado.

Sea  $d$  un entero positivo distinto de 2, 5 y 13. Probar que es posible encontrar números  $a$  y  $b$  en el conjunto  $\{2,5,13,d\}$  de modo que  $ab - 1$  no es cuadrado perfecto. (IMO 1986, problema 1)

Observemos que, para los números 2, 5 y 13, se verifica que  $ab - 1$  es siempre cuadrado perfecto:

$$2 \cdot 5 - 1 = 3^2$$

$$2 \cdot 13 - 1 = 5^2$$

$$5 \cdot 13 - 1 = 8^2$$

Se trata de ver que no es posible añadir ningún nuevo entero al conjunto de manera que siga verificándose la propiedad.

El número  $d$  debería verificar:

$$2d - 1 = x$$

$$5d - 1 = y$$

$$13d - 1 = z$$

Con  $x, y, z$  cuadrados perfectos.

Cualquier cuadrado perfecto, módulo 4, es 0 ó 1, dependiendo de que sea par o impar.

Supongamos que  $d$  es par. Entonces sería múltiplo de 4 o múltiplo de 4 más 2, es decir, módulo 4 sería 0 ó 2.

Entonces,  $2d - 1 \equiv -1 \equiv 3$  módulo 4, y no podría ser cuadrado perfecto.

Si  $d$  es múltiplo de 4 más 3, es decir, si es 3 módulo 4:  $5d - 1 \equiv 15 - 1 \equiv 2$  (módulo 4), y tampoco podría ser un cuadrado perfecto.

Por último, si  $d$  es múltiplo de 4 más 1, tanto  $2d - 1$  (1 módulo 4) como  $5d - 1$  y  $13d - 1$ , que valen 0 módulo 4, podrían ser cuadrados perfectos.

Supongamos que efectivamente lo fueran. Hacemos  $d = 4k + 1$ , y tenemos:

$$x = 2d - 1 = 2(4k + 1) - 1 = 8k + 1 = a^2$$

$$y = 5d - 1 = 5(4k + 1) - 1 = 20k + 4 = 4(5k + 1) = 4b^2$$

$$z = 13d - 1 = 13(4k + 1) - 1 = 52k + 12 = 4(13k + 3) = 4c^2$$

todos cuadrados perfectos.

Como

$$8k + 1 = a^2$$

$$5k + 1 = b^2$$

$$13k + 1 = c^2$$

resulta que  $a^2 + b^2 = c^2 - 1$ .

Pero esto no es posible:

Si  $c^2 \equiv 0$ , entonces  $c^2 - 1 \equiv -1 \equiv 3$ , que nunca puede ser una suma de cuadrados módulo 4.

Si  $c^2 \equiv 1$ , entonces  $c^2 - 1 \equiv 0 \equiv a^2 + b^2$ , es decir,  $a^2 \equiv 0 \equiv b^2$  (módulo 4), lo que implica que  $a$  y  $b$  son pares. Pero esto es falso, ya que  $a^2 = 8k + 1$ , impar.

Por lo tanto, cualquiera que sea  $d$  distinto de 2, 5 y 13, es posible encontrar dos números  $a$  y  $b$  de modo que  $ab - 1$  no sea cuadrado perfecto.

*A un congreso asisten 201 científicos de cinco nacionalidades distintas. Se sabe que en cada grupo de seis, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que habrá un grupo de cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.*  
(OME 1993)

El principio del palomar nos asegura que hay al menos 101 personas del mismo sexo. Entre estas, como  $101 = 20 \cdot 5 + 1$ , de nuevo podemos asegurar que hay al menos 21 personas de la misma nacionalidad y del mismo sexo.

No puede haber más de cinco edades diferentes. En efecto, si así fuera, podríamos elegir un grupo de seis científicos con edades distintas.

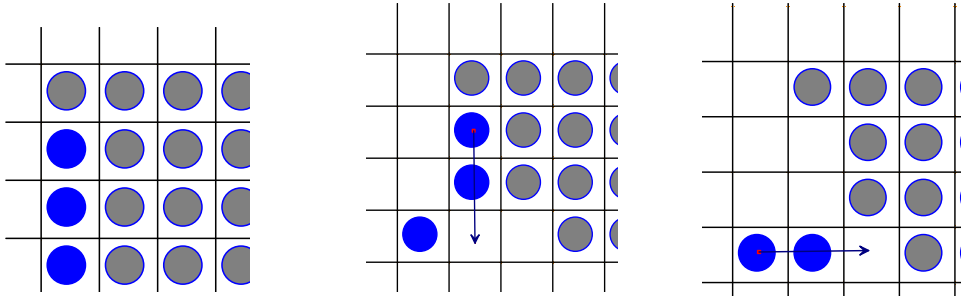
Aplicando de nuevo el principio del palomar, como  $21 = 5 \cdot 4 + 1$ , podemos asegurar que hay al menos cinco personas de la misma edad, nacionalidad y sexo.

*Sobre un tablero infinito, se juega un solitario de la siguiente manera:  
Colocamos  $n^2$  fichas en cada una de las casillas de un cuadrado de lado  $n$ . Hay un único movimiento posible, que consiste en hacer saltar una ficha sobre otra a una casilla vacía, en horizontal o en vertical, retirando la ficha sobre la que se ha saltado.  
Determinar los valores de  $n$  para los que el juego puede terminar con una sola ficha sobre el tablero.*  
(IMO 1993, problema 3)

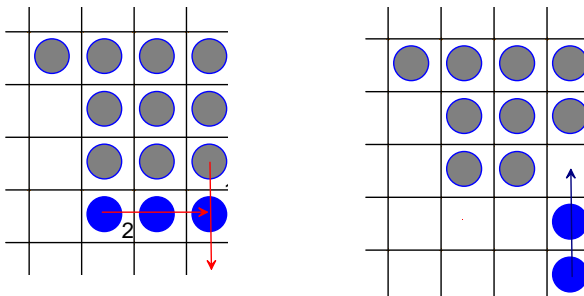
Si empezamos el juego considerando cuadrados “pequeños”, podemos ganar fácilmente en cuadrados de lado  $n = 2$ , y no lo conseguimos en cuadrados de lado  $n = 3$ .

Lo jugamos en un cuadrado  $n = 4$ :

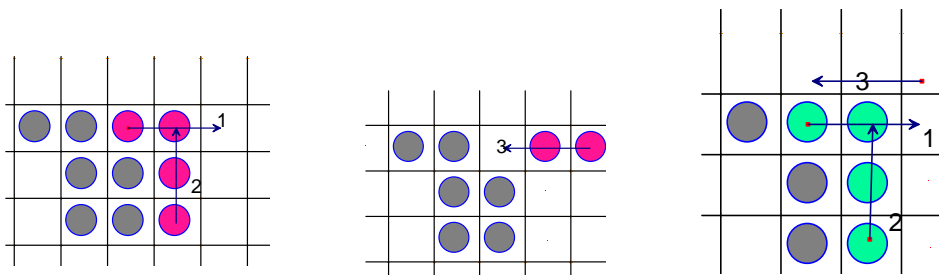
Empezamos eliminando las tres fichas coloreadas de azul.



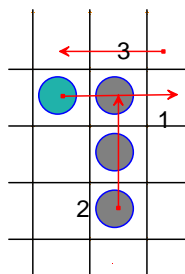
Con el mismo esquema, , eliminamos la fila inferior del cuadrado de lado tres en tres movimientos:



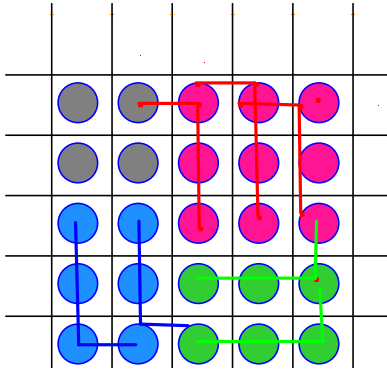
A continuación, se eliminan, de derecha a izquierda, las columnas del nuevo cuadrado de lado 3 . En cada esquema, se muestran, coloreadas, las 4 fichas en forma de L que se utilizan:



Obtenemos al final una configuración con cuatro fichas, en forma de L, a partir de la cual y repitiendo el algoritmo mostrado nos quedaríamos con una única ficha en el tablero:



De manera análoga el juego se termina partiendo de un cuadrado de lado  $n = 5$ , en el que, siguiendo el procedimiento indicado, reducimos el cuadrado inicial a otro de lado  $n = 2$ . En el siguiente esquema, se indica la forma en que se deben ir eliminando filas y columnas, jugando siempre con cuatro fichas en la configuración L.



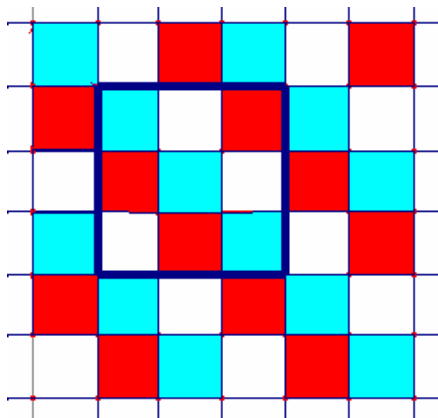
Se eliminan en primer lugar las fichas azules, con las que se forman dos L, a continuación las rojas, también con dos L, y por último el cuadrado rojo, de tres L.

Quedan cuatro fichas formando un cuadrado de lado 2, que permite terminar el juego en 3 movimientos.

De esta forma, cualquier cuadrado de lado  $n$  se reduce a otro de lado  $n - 3$ , de manera que si  $n$  es de la forma  $3k$  llegamos a un tablero de orden 3, si es de la forma  $3k + 1$  obtenemos uno de orden 4, y por último, si es de la forma  $3k + 2$  obtenemos uno de orden 2. En estos dos últimos casos, el juego puede terminar con una sola ficha sobre el tablero.

Demostramos por último que es imposible ganar con cuadrados de lado  $n = 3k$ .

Para ello, imaginemos el tablero coloreado diagonalmente en 3 colores, por ejemplo, azul, blanco y rojo, como se indica en la figura. Habrá la misma cantidad de casillas de cada color.



Cada movimiento posible elimina una ficha de dos de los colores usados, y aumenta una ficha del tercer color. Así, si en algún momento del juego tenemos  $a$  fichas azules,  $b$  fichas blancas y  $r$  fichas rojas, después de realizar un movimiento llegaremos a tener  $(a - 1, b - 1, r + 1)$ , o  $(a - 1, b + 1, r - 1)$  o  $(a + 1, b - 1, r - 1)$ , según que la ficha que salte llegue a una casilla roja, blanca o azul.

Al empezar el juego, hay  $k$  fichas sobre cada uno de los colores. Tienen por lo tanto la misma paridad.

Después de cada movimiento, el número de fichas sobre cada uno de los colores aumenta o disminuye en 1, lo que cambia la paridad de cada una de ellas. Seguirán entonces teniendo la misma paridad.

Pero entonces es imposible llegar a tener una sola ficha en el tablero, ya que los números que representan las fichas sobre cada uno de los colores serían entonces  $(0,0,1)$ , en algún orden, y tienen distintas paridades. Es más, si dejamos dos fichas sobre el tablero, estas estarán sobre casillas del mismo color, y si al final quedaran 3, estarían sobre colores distintos.

Por lo tanto, el solitario no puede ganarse jugando con cuadrados de lado  $n = 3k$ , mientras que es posible terminarlo en cualquier otro caso.

*En la Isla cromática, hay 13 camaleones rojos, 15 grises y 17 marrones.*

*Cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos, ambos cambian su color al tercero. (Por ejemplo, si se encuentran un camaleón gris y uno marrón, los dos se vuelven rojos).*

*¿Es posible que, en algún momento, todos los camaleones de la isla sean del mismo color? (Torneo de las Ciudades; edad máxima 15 años)*

Llamemos  $x, y, z$  al número de camaleones rojos, grises y marrones en un determinado momento. Cuando se encuentran dos camaleones de distinto color, dos de estos números disminuirán en 1, mientras que el tercero aumentará en 2. Entonces, sus diferencias se conservarán o variarán en 3 después de cada encuentro.

Si en algún momento los 45 camaleones fueran de un mismo color, los números  $x, y, z$  serían 45, 0, 0 en algún orden, y las diferencias  $z - x, y - x, z - y$  serían, en algún orden, 45, 45, 0, múltiplos de 3. Pero estas diferencias son inicialmente 4, 2, 2, con restos 1, 2, 2 en la división por 3. Al conservarse o variar de 3 en 3, no podemos llegar a 45, 45, 0.